解が動く分岐点をもたない一階代数的常微分方程式 (常微分方程式の複素解析的研究)

AUTHOR(S):

岡本, 和夫

数理解析研究所講究録
196巻 1973年 100-110

解が動く分岐点をもたない一階代数的常微分方程式

東大 理　岡本和夫

§1. 特異点

解が動く特異点をもたないような、非線型常微分方程式の研究は主としてP. Painlevé によって行なわれ、彼によって決定された6個の型の二階非線型方程式は有名である。この小論では、彼のストックホルムでの講義；

Leçons sur la Théorie analytique des équations différentielles. (1897)

から、一階代数的常微分方程式に関する彼の研究の一部を紹介する。我々の考察する方程式は次の型のものである。

(1) $F(x, y, y')=0$ $\left(y'=\frac{dy}{dx} \right)$

ただし、方程式(1)に対して次の約束をする。

(i) F はすべての変数について多項式

(ii) 各 x を固定した時、(1)の決定する平面代数曲線を C_x とかく。すなわち $C_x: F(x, W_1, W_2)=0$ 。

(iii) 有限個のxの値を除いてC_xのgenusは一定である。従って方程式(1)から得られる代数曲線のfamily $C\equiv\{C_x\}$に対して、この意味でCのgenusをgとする。

(iv) $\deg_{w_2}=m$ とする。

すなわち

(1)′ $F=\sum_{j=0}^{m}A_j(x,y)(y')^{m-j}$

とかけて、$A_j(x,y)$ $(0\leq j\leq m)$ は共通因子のない2変数の多項式とする。また、かんたんのために、$x=\infty$ および $y=\infty$に対応する方程式

(1)″ $\tilde{F}(t,y,y')=0$ $t=\frac{1}{x}$; $\hat{F}(x,z,z')$ $z=\frac{1}{y}$

$y'\equiv\frac{dy}{dt}$; $z'=\frac{dz}{dx}$

も含めて単に方程式Fということにする。

さて方程式(1)のy'に関する判別式を$D(x,y)$とすれば、$D(x,y)=g(x)\prod_{\alpha=1}^{\mu}(y-g_\alpha(x))^{m_\alpha}$, $\sum_{\alpha=1}^{\mu}m_\alpha=m$ と書ける。ここで $g(x)$はxの多項式、$g_\alpha(x)$ $(1\leq\alpha\leq\mu)$はxの(高々)代数関数である。このとき、多項式 $\hat{D}(x,y)=g(x)\prod_{\alpha=1}^{\mu}(y-g_\alpha(x))$ の判別式を $DD(x)=\mathrm{const}\cdot g(x)^{2\mu-2}\prod_{\alpha<\alpha'}(g_\alpha(x)-g_{\alpha'}(x))^2$ とする。次に我々は次のような集合を決める;

(i) $S_1=\{\xi_1\mid A_0(\xi_1,y)\equiv 0\}$

(ii) $S_2=\{\xi_2\mid A_0(\xi_2,y)\not\equiv 0,\ A_j(\xi_2,y)=0\ (0\leq j\leq m)$ が共通根 $y=\eta$ をもつ$\}$

(iii) $S_3=\{\xi_3 \mid DD(\xi_3)=0\}$

(iv) $x\notin S_1\cup S_2\cup S_3$ について、一意化変数 $t=t(x)$をとって

$y=f(x)+t(x)^{\nu}$, $y'=\tilde{f}(x)+t(x)^{\lambda}(u(x)+\cdots\cdots)$

と書けるが、このとき $S_4=\{\xi_4 \mid u(\xi_4)=0\}$

$S=\bigcup_{j=1}^{4}S_j$ とおき、Sを方程式Fの特異点と呼ぶ。

<u>注意</u> 変換された方程式(1)″についても同様の点を数え上げて集合Sに加えておく。あきらかにSは有限集合である。

・$X\equiv\mathbb{P}^1-S$ とおく。また $\infty\in S$ (i.e. $X\subset\mathbb{C}$) としてよい。すべての $x\in X$ について C_xのgenus は一定である。すなわち $g(C_x)=g(C)=g$ $x\in X$。方程式(1)の解がXで分岐点をもつとき、それらの分岐点をすべて動く分岐点と呼ぶ。

§2 解

初期条件 $x=x_0, y=y_0$ に対応する解を $y=\varphi(x,x_0\, y_0)$, 初期条件 $x=x_0$, $y=y_0$, $y'=y_0'$ に対応する解を $y=\varphi(x,x_0,y_0,y_0')$ のように書くことにする。$x=x_0$ で正則な(1)の解 $y=\varphi(x,x_0\,y_0)$ は一意的ではないが、$y=\varphi(x,x_0,y_0,y_0')$は一意的に定まる。一般にこれらは3変数または4変数の多価関数であるが、ある変数を任意に固定する時その変数の上に ‾ をつける。すなわち $\varphi(x,\bar{x}_0,y_0)$は x_0を固定した xとy_0の2変数の関数を考察しているということにする。

前にならって $A_0(x,y)=h(x)\prod_{\beta=1}^{\mu}(y-h_\beta(x))^{m_\beta}$ とし、また、$x_0\in X$ の近傍での $F=0$ の分枝を $y'=f_k(x,y)$，対応する解を $y=\varphi_k(x,x_0,y_0)$（$1\leq k\leq m$）とする。

さて、ある β_0 について $\bar{y}_0=h_{\beta_0}(\bar{x}_0)$ とする。（$\bar{x}_0\in X$）このとき、ある k_0 に対して $\frac{1}{f_{k_0}(\bar{x}_0,\bar{y}_0)}=0$ となるから、微分方程式 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{f_{k_0}(x,y)}$ の解 $x=\psi(y,y_0,x_0)$ は $y=\bar{y}_0$, $y_0=\bar{y}_0$, $x_0=\bar{x}_0$ で正則であるが、逆関数 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ は $x=\bar{x}_0$, $x_0=\bar{x}_0$ $y_0=\bar{y}_0$ で代数型(algebroid) である。

次に、$\bar{x}_0\in X$ について各 $g_\alpha(x)$ は $x=\bar{x}_0$ で正則である。そこである α_0 について $\bar{y}_0=g_{\alpha_0}(\bar{x}_0)$ とする。このとき一意化変数 $t=t(x)$ をとって、$x=\bar{x}_0$ の近傍で

(2) $\quad y=g_{\alpha_0}(x)+t^{\nu}\quad,\quad y'=\tilde{g}_{\alpha_0}(x)+t^{\lambda}(u(x)+O(t))$

と書ける。従って(2)より次の微分方程式を得る。

(3) $$\nu t^{\nu-1}\frac{dt}{dx}=\tilde{g}_{\alpha_0}(x)-g'_{\alpha_0}(x)+t^{\lambda}(u(x)+O(t)).$$

$\nu\neq 1$ であるから $\tilde{g}_{\alpha_0}(x)\not\equiv g'_{\alpha_0}(x)$ の場合にはこの方程式の解、$t=t(x)$ は $x=\bar{x}_0$ で正則ではなく代数的特異点をもつ。一方 $\tilde{g}_{\alpha_0}(x)\equiv g'_{\alpha_0}(x)$ の場合には2つの場合が考えられる。

(I) $\lambda\geq\nu-1$ このとき(3)は $x=\bar{x}_0$ で正則な解 $t=t(x)$ をもち従って $y=g_{\alpha_0}(x)+t(x)^{\nu}$ は $x=\bar{x}_0$ で高々有理型である。このとき、(1)のすべての解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ は $x=\bar{x}_0$, $x_0=\bar{x}_0$, $y_0=\bar{y}_0$ で正則である。

(II) $\lambda < \nu - 1$　このとき(3)は $x=\overline{x}_0$ で代数型(algebroid)な解をもつ。ゆえに(1)の解 $y=\varphi_k(x, x_0, y_0)$ のひとつは $x=\overline{x}_0$ で代数的特異点をもつ。

以上をもとにして次の定理を得る。

<u>定理</u>（Painlevé）

方程式　$F(x, y, y')=0$　の動く分岐点はすべて代数的である。

(証明)

$x=a \notin S$ がある解 $y=\varphi(x)$ の特異点であったとする。あきらかに、$\varphi(x)$ の $x=a$ での集積値集合 Δ はただ1点からなる。これを b とすれば、$A_0(a, b)=0$ あるいは $D(a, b)=0$ となっている。そうでなければPainlevéの一意性定理によって $\varphi(x)$ は $x=a$ で正則となる。いずれにせよ $x=a$ は解 $y=\varphi(x)$ の代数的特異点である。(終)

我々は初期値に関する次の定理も得る。証明は省略する。

<u>定理</u>（Painlevé）

(I) $y=\varphi(\overline{x}, \overline{x}_0, y_0, y_0')$ は (y_0, y_0') について高々代数的特異点しかもたない。

(II) $y=\varphi(\overline{x}, \overline{x}_0, y_0, y_0')$ が $(y_0, y_0')=(\overline{y}_0, \overline{y}_0')$ で特異点をもてば、$y=\varphi(x, \overline{x}_0, \overline{y}_0, \overline{y}_0')$ は $x=\overline{x}$ で特異点をもつ。

§3 動く分岐点をもたない方程式(I)

まず $A_0(x, y)$ は y を含まない。そうでなければ $\bar{x}_0 \in X$ に対して $A_0(\bar{x}_0, \bar{y}_0) = 0$ なる $\bar{y}_0$ が存在し、$x = \bar{x}_0$ を代数分岐点とするような解が存在する。すなわち $A_0(x, y) = \alpha(x)$ となる。多項式 $\alpha(x)$ の零点は方程式の(動かない)特異点である。そこで、$F = 0$ を

$$(y')^m + \frac{A_1(x, y)}{\alpha(x)}(y')^{m-1} + \cdots + \frac{A_m(x, y)}{\alpha(x)} = 0$$

として $y = \frac{1}{z}$ なる変換を行えば、

$$(z')^m - z^2 A_1\left(x, \frac{1}{z}\right) \frac{1}{\alpha(x)} (z')^{m-1} + \cdots + (-1)^m A_m\left(x, \frac{1}{z}\right) \frac{z^{2m}}{\alpha(x)} = 0$$

についても同様で結局我々は、

(4) $\qquad \deg_y A_j(x, y) \leq 2j \qquad (1 \leq j \leq m)$

を得る。次に前の§2 で考察したように(2)において

(5) $\qquad \tilde{g}_{\alpha_0}(x) \equiv g'_{\alpha_0}(x), \quad \lambda \geq \nu - 1$

でなければならぬ。この場合、とくに $D(x, y) = 0$ の分枝 $y = g_\alpha(x)$ はすべて $F = 0$ の解となる。我々はまず簡単な場合、$m = 1, 2$ の場合について調べてみよう。

$\underline{\underline{m = 1}}$

方程式は $\frac{dy}{dx} = R(x, y)$, $R(x, y)$ は x, y の有理関数と書けるが、(4)から $R(x, y)$ は y の高々2次の多項式となる。従って $\frac{dy}{dx} = R(x, y)$ が動く分岐点をもたないならば方程式は Riccati の微分方程式に帰着される。

$m=2$

方程式

(6) $$(y')^2+A_1(x,y)y'+A_2(x,y)=0$$

に対して変換 $y=\dfrac{a(x)y_1+b(x)}{c(x)y_1+d(x)}$ を おこなって

$$(y_1')^2+\hat{A}_1(x,y_1)y_1'+A_2(x,y_1)=0$$

となったとすれば、これらの判別式 $D(x,y)$, $\hat{D}(x,y_1)$には

$$D\left(x,\frac{a(x)y_1+b(x)}{c(x)y_1+d(x)}\right)(c(x)y_1+d(x))^4=\hat{D}(x,y_1)$$

なる関係がある。そこではじめから判別式 $D(x,y)$ は適当な形に変換されているものとする。3つの場合を考える。

(I) $D(x,y)=d(x,y)^2$ となる時は(6)はRiccatiの方程式に帰着できる。

判別式を $D(x,y)=g(x)y(y-g_1(x))(y-g_2(x))$ と書くと.

(II) $g_1(x)=g_2(x)$ の時、(6)から

(6)′ $$\left(y'+\frac{1}{2}A_1(x,y)\right)^2+\frac{1}{4}g(x)y(y-g_1(x))^2=0 .$$

$y\equiv 0$ は、(6)′ の特異解、従って $A_1(x,0)\equiv 0$。$y=\dfrac{1}{z}$ という変換をすれば $z\equiv 0$ も(6)′ の解であるから、結局方程式は

$$(y'+\alpha(x)y)^2+y(\beta(x)y+\gamma(x))^2=0$$

となる。ここで $y=u^2$ とおくと.

$$2\frac{du}{dx}+\hat{\alpha}(x)u^2+\hat{\beta}(x)u+\gamma(x)=0 .$$

すなわち Riccati の方程式に帰着できて、この時(6)の一般

解は $y=\dfrac{C^2\varphi_1(x)+C\varphi_2(x)+\varphi_3(x)}{C^2\psi_1(x)+C\psi_2(x)+\psi_3(x)}$ とかける

(iii) 一般の場合、(6)′ は４つの特異解をもつが、$A_1(x,y)$ の次数から $A_1(x,y)\equiv 0$。また特異解 $y=g(x)$ について、$g'(x)\equiv 0$ を得る。従って方程式は

$$(y')^2=\alpha(x)(4y^3-g_2y-g_3)\quad (g_2, g_3 は定数)$$

に帰着される。一般解は $y=\wp(\int\sqrt{\alpha(x)}dx)$ とかける。

以上をまとめて、$m=2$ の時、解が動く分岐点をもたない方程式は、求積できるか、あるいはRiccatiの方程式に帰着されることがわかった。

§4. 動く分岐点をもたない方程式(2)

方程式 $F=0$ が動く分岐点をもたないとすると、解 $y=\varphi(\bar{x},\bar{x}_0,y_0,y_0')$ は２変数(y_0,y_0') の関数として高々pole しかもち得ない($y_0=\infty$, $y_0'=\infty$ も含めて)。従って解 $y=\varphi(x,x_0, y_0,y_0')$ は y_0, y_0' に関して有理関数である。Xに含まれるてきとうな道に沿って解を x_0 から x_1 まで解析接続したとき、$y_1=\varphi(x_1,x_0,y_0,y_0')$, $y_1'=\varphi'(x_1,x_0,y_0,y_0')$ とすると、対応 $\gamma:(y_0,y_0')\longrightarrow(y_1,y_1')$ は代数曲線 C_{x_0}, C_{x_1} の有理変換 $\gamma^*: C_{x_0}\dashrightarrow C_{x_1}$ を与える。逆接続を考えれば明らかなように有理変換 γ^* は双有理変換である。従って、方程式 $F=0$ の形を決めるには、代数曲線 C_{x_0} の双有理

自己同型をすべて決定すればよいわけである。したがって一階の方程式の場合には動く分岐点をもたない方程式の形を決めることはそれほど困難ではない。代数曲線Cのgenus をgとして、3つの場合（$g\geqq 2$, $g=1$, $g=0$）について調べてみる。

(I) $g(C)\geqq 2$

よく知られたように. $g\geqq 2$ のcurve の双有理自己同型は有限個しかない。従ってこの場合方程式は代数的に解けてしまう。とくにcurve Cが hyperelliptic の場合には双有理変換

(7) $$y=r(x, X_1, Y_1)\ ,\quad y'=s(x, X_1, Y_1)$$

によって C_x $(x\in X)$ は標準型

(8) $$Y_1^2=P(X_1)\qquad \deg P(X_1)=2g+1.$$

へ変換できる。(7), (8)より

$$s(x, X_1, Y_1)=\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dx}+\frac{\partial r}{\partial Y_1}\frac{dY_1}{dx}$$
$$2Y_1\frac{dY_1}{dx}=\frac{\partial P}{\partial X_1}\frac{dX_1}{dx}$$

従ってこの式および(8)から

$$\frac{dX_1}{dx}=f(X_1)+g(X_1)Y_1\ ,\quad f, g\text{ は有理函数}$$

となる。これは

(9) $$\left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2-2f(X_1)\frac{dX_1}{dx}+f^2(X_1)-g^2(X_1)P(X_1)=0$$

となるが前の§の結果から、この方程式は動く分岐点をもたないゆえ、 $\deg f(X_1)\leqq 2$, $\deg(f^2(X_1)-g^2(X_1)P(X_1))\leqq 4$

でなければならぬ。$g \geqq 2$ であるから必然的に $g(X_1) \equiv 0$ となり. $X_1(x)$ のみたすべき方程式は Riccati でなければならぬ。一方 $Y_1(x)$ もまた、S以外の分岐点をもち得ないから (8)の右辺の零点を X_1^0 とすれば (i.e $P(X_1^0)=0$)、方程式 $\frac{dX_1}{dx}=f(X_1)$ の解 $X_1=\varphi(x, x_0, X_1^0)$ は $X_1 \equiv X_1^0$ でなければならぬ。再び $P(X_1)$, $f(X_1)$の次数を比較して $f(X_1) \equiv 0$ を得る。すなわち有理変換(7)は固定した曲線(8)との双有理変換を与え、これによって微分方程式 $F=0$ は代数的に解ける。

(II) $g=1$

この場合には C_x は変換(7)によって

$$(7)' \qquad Y_1^2 = 4X_1^3 - g_2X_1 - g_3$$

と双有理的である。前と同様に我々は微分方程式

$$(9)' \qquad \left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2 - 2f(X_1)\frac{dX_1}{dx} + f^2(X_1) - g^2(X_1)(4X_1^3 - g_2X_1 - g_3) = 0$$

を得るが、前の§の考察によって、これは $g(X_1) \neq 0$ ならば

$$(9)'' \qquad \left(\frac{dX_1}{dx}\right)^2 - \alpha(x)(4X_1^3 - g_2X_1 - g_3) = 0$$

g_2, g_3 は定数

に帰着され、(7)′ より

$$X_1 = \wp\left(\int \alpha(x)dx\right), \quad Y_1 = \wp'\left(\int \alpha(x)dx\right).$$

すなわち、この場合 $F=0$ は楕円関数によって求積できる。また、$g(X_1) \equiv 0$ の場合は $g \geqq 2$ の hyperelliptic の場合同様代数的に解ける。

(III) $g=0$.

このときは、てきとうな y, y' の有理関数

$$t=s(x, y, y')$$

によって、

(10) $\qquad y=r_1(x, t), \qquad y'=r_2(x, t)$

とかける。ここで r_1, r_2 は t の有理関数である。(10)より

$$r_2(x, t)=\frac{\partial r_1}{\partial x}+\frac{\partial r_1}{\partial t}\frac{dt}{dx}\text{、 従って}$$

(11) $\qquad \dfrac{dt}{dx}=R(x, t) \qquad R$ は t の有理関数

を得るが、(11)の解 $t=t(x)$ は動く分岐点をもたないから、(11)はRiccati の微分方程式でなければならぬ。この場合、(11)の一般解は任意定数を C として $t=\dfrac{C\varphi_1+\varphi_2}{C\psi_1+\psi_2}$ と書けるから、微分方程式 $F=0$ は任意定数 C の有理関数である。

以上をまとめて

<u>結論</u> 代数的微分方程式 $F(x, y, y')=0$ の解が動く分岐点をもたないならば、それは初期条件 y_0, y_0' の有理関数である。しかもその場合、方程式 $F=0$ は代数的に解けるか、求積できるか、さもなくばRiccatiの微分方程式に帰着される。